

Méthode primale de résolution d'un programme linéaire .

Primal approach to solving a
linear program.

CHAPITRE 2



DÉFINITIONS



01 Programmation Linéaire PL

La programmation linéaire (PL) est une méthode mathématique utilisée pour déterminer la meilleure issue (telle que le profit maximal ou le coût minimal) dans un modèle mathématique dont les exigences sont représentées par des relations linéaires.

DÉFINITIONS



02

Composants Clés d'un Problème de PL

- 1) **Fonction Objectif** : C'est la fonction mathématique linéaire que vous souhaitez optimiser (maximiser ou minimiser).
- 2) **Contraintes** : Ce sont les limites ou restrictions (ressources disponibles, temps, demande, etc.)
- 3) **Variables de Décision** : Ce sont les quantités inconnues que vous devez déterminer pour atteindre l'optimum.

DÉFINITIONS



02

Composants Clés d'un Problème de PL

- 1) **Fonction Objectif** : C'est la fonction mathématique linéaire que vous souhaitez optimiser (maximiser ou minimiser).
- 2) **Contraintes** : Ce sont les limites ou restrictions (ressources disponibles, temps, demande, etc.)
- 3) **Variables de Décision** : Ce sont les quantités inconnues que vous devez déterminer pour atteindre l'optimum.

DÉFINITIONS



03 Pour résoudre un programme linéaire on utilise :

- 1) La méthode graphique**
- 2) L'algorithme du simplexe**



1

Solution Graphique

Méthode Graphique :

- 1) Définir le Plan et les Variables
- 2) Tracer les Contraintes
- 3) Détermination de la Région Admissible
- 4) Identifier la Solution Optimale

Solution Graphique

1

Définir le Plan et les Variables et Tracer les Contraintes :

Pour tracer les contraintes d'un problème de Programmation Linéaire ; il faut traiter chaque inégalité comme une équation de droite « Conversion des Inégalités en Équations de Droite »

Nous transformons chaque inégalité en une équation pour tracer les droites limites.

Nous devons trouver deux points pour chaque droite. Le plus simple est de trouver les points d'intersection avec les axes x_1 et x_2 .

1

Solution graphique

Identifier la Solution Optimale



Il faut chercher la solution optimale dans cette ensemble infinie de solutions réalisables

Si une solution optimale existe, elle se trouve toujours à un sommet (vertex) de la Région Réalisable D.

-> Chercher tous les points sommets de (D) et, parmi ceux-ci, choisir le point qui rend l'objectif Optimal (maximum ou minimum) par deux méthodes :

- 1) Méthode de recensement des Sommets
- 2) Méthode des droites parallèles

1

Solution Graphique

01- Méthode de recensement des sommets (Vertex Enumeration Method)

- 1) Calculer les coordonnées de tous les sommets de la région D.
- 2) Évaluer la Fonction Objectif (Z) à chacun de ces sommets.
- 3) Le sommet qui donne la plus grande valeur de Z est la solution optimale pour la Maximisation.
- 4) Le sommet qui donne la plus petite valeur de Z est la solution optimale pour la Minimisation.

Solution Graphique

02-Méthode des droites parallèles (Isoprofit/Isocost Line Method)

- 1) Tracer une droite d'iso-objectif (la droite relative à la fonction objectif) pour une valeur arbitraire de Z . (exp $z=0$)
- 2) Déplacer cette droite parallèlement à elle-même (glisser la règle droite parallèlement à la droite) dans la direction de l'optimisation (augmentation pour MAX, diminution pour MIN).
- 3) Le dernier point de la région D touché par la droite est la solution optimale.

Exemple

Un restaurateur propose deux types d'assiettes :

Assiette 1 (prix = 1000 DA) : contient : 5 sardines, 2 crevettes royales, 1 rouget

Assiette 2 (prix = 1500 DA) : contient : 3 sardines, 3 crevettes royales, 3 rougets

Le restaurateur dispose d'un stock de : 30 sardines - 24 crevettes royales - 18 rougets

Combien d'assiettes de chaque type doit-il préparer pour maximiser son chiffre d'affaires ?

1

Solution Graphique

🕒 Exemple : Le Problème du Restaurateur

1. Formulation du Problème Linéaire

1.1) Identifier les variables de décision :

X : Nombre d'assiettes du 1er type.

Y : Nombre d'assiettes du 2e`me type.

1.2) Objectif (Maximiser) :

Maximiser $F(x,y)=1000X+1500Y$

1.3) Contraintes (PL) :

$$5x+3y \leq 30$$

$$2x+3y \leq 24$$

$$x+3y \leq 18$$

$x \geq 0, y \geq 0$ (Contraintes de non-négativité)

1

Solution Graphique

Étapes de Résolution Graphique

- 1) Réaliser un repère orthonormé.
- 2) Tracer la région réalisable (les solutions admissibles) : La représentation graphique des contraintes

Détails de Traçage des Contraintes :

C1 : $5X + 3Y \leq 30$



Si $X=0 \Rightarrow 3Y=30 \Rightarrow Y=10$. **Point (0, 10).**

Si $Y=0 \Rightarrow 5X=30 \Rightarrow X=6$. **Point (6, 0).**

C2 : $2X + 3Y \leq 24$



Si $X=0 \Rightarrow 3Y=24 \Rightarrow Y=8$. **Point (0, 8).**

Si $Y=0 \Rightarrow 2X=24 \Rightarrow X=12$. **Point (12, 0).**

C3 : $X + 3Y \leq 18$



Si $X=0 \Rightarrow 3Y=18 \Rightarrow Y=6$. **Point (0, 6).**

Si $Y=0 \Rightarrow X=18$. **Point (18, 0).**

Solution Graphique

3- Recherche de la Solution Optimale

01- Méthode des Droites Parallèles (Gradient)

Cette section explique comment tracer la droite de la fonction objectif pour déterminer la direction du maximum.

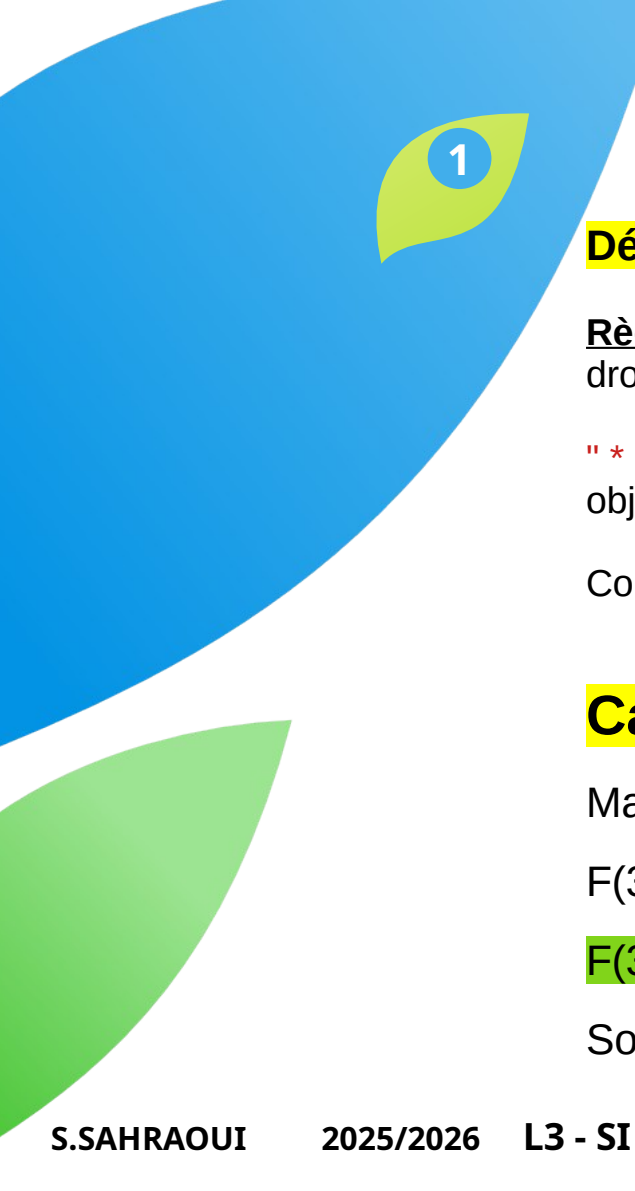
Tracé de la Droite Objectif

On donne une valeur arbitraire m à la fonction objectif pour obtenir une droite de référence.

$$F(x,y)=1000x+1500y=m.$$

$$M=0 \quad 1000x+1500y=0$$

Points de référence tracés : $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,4)$, $(1,-0.66)$.



1

Solution Graphique

Détermination de l'Optimum

Règle de glissement : "Faire glisser la règle parallèlement à la droite jusqu'à arriver à un point de l'espace convexe.

" * **Règle de maximisation** : " Si on cherche à Maximiser la fonction objectif, on va chercher l'intersection **la plus loin de l'origine.**"

Conclusion : "Alors la solution optimale correspond au point **B(3,5).**"

Calcul du Maximum

$$\text{Max } F(x,y)=F(3,5)=1000(3)+1500(5)$$

$$F(3,5)=3000+7500$$

$$F(3,5)=10500$$

Solution optimale : $x=3$, $y=5$

Solution Graphique

2- Méthode de Recensement des Sommets

Cette section commence l'étape de vérification en évaluant la fonction objectif à **tous les sommets**.

Principe : "On va déterminer les points Sommets soit graphiquement, soit mathématiquement, après comparer les valeurs de l'objectif correspondant à chacun des points Sommets."

PE (Sommet),	"(x,y)",	"F(x,y)"
O,	"(0,0)",	0
A,	"(0,6)",	9000
B,	"(3,5)",	10 500 (MAX)
C,	"(6,0)",	6000

Les deux méthodes confirment que la valeur maximale est 10500 atteinte au point (3,5).

Thank you!

