

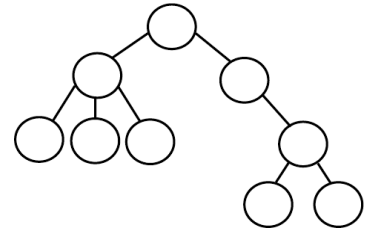
Les arbres (trees)

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on utilisera la convention suivante : la hauteur d'un arbre binaire ne comportant qu'un nœud est 0.

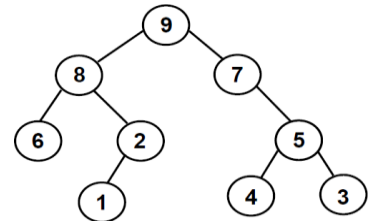
On considère l'arbre étiqueté ci-contre.

1. Indiquer sa hauteur :
2. Indiquer sa taille :
3. Indiquer son arité maximale parmi les nœuds de l'arbre :



On considère l'arbre binaire ci-contre étiqueté par des entiers.

4. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours en largeur :
5. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours préfixe :
6. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours infixe :
7. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours suffixe :



Exercice 2 : reconstruire un arbre binaire

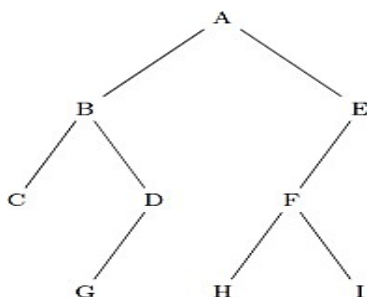
Un arbre binaire est étiqueté avec des lettres. Un parcours préfixe de l'arbre donne : ALORHGIMET. Un parcours infixe donne : OLHRAMIEGT.

1. Reconstruire l'arbre binaire qui a produit ces deux parcours.
2. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours en largeur.
3. Indiquer dans quel ordre seront examinés les nœuds lors d'un parcours suffixe.

Exercice 3 : analyse d'un arbre binaire et d'un arbre binaire de recherche

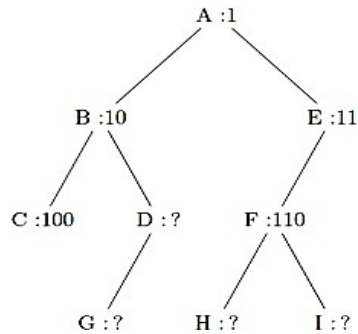
Cet exercice porte sur les arbres binaires et les arbres binaires de recherche. Dans cet exercice, on utilisera la convention suivante : la hauteur d'un arbre binaire ne comportant qu'un nœud est 1.

1. Déterminer la taille et la hauteur de l'arbre binaire suivant :



2. On décide de numéroter en binaire les nœuds d'un arbre binaire de la façon suivante :
 - la racine correspond à 1 ;
 - la numérotation pour un fils gauche s'obtient en ajoutant le chiffre 0 à droite au numéro de son père ;
 - la numérotation pour un fils droit s'obtient en ajoutant le chiffre 1 à droite au numéro de son père ;

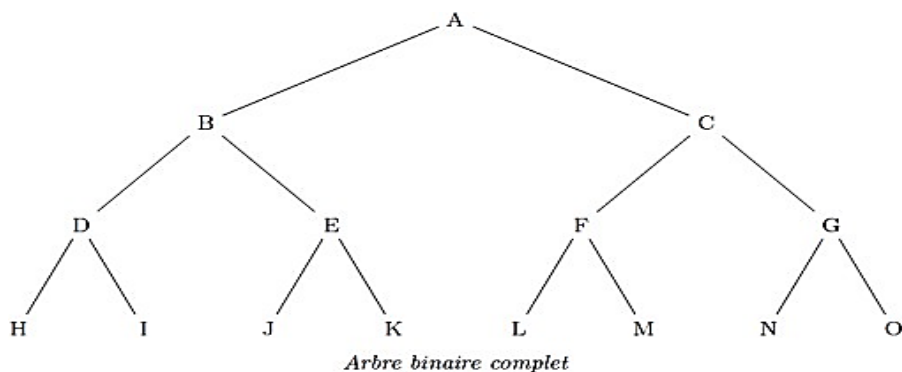
Par exemple, dans l'arbre ci-dessous, on a utilisé ce procédé pour numéroté les nœuds A ;B ;C ;E et F.



- 2.1. Dans l'exemple précédent, quel est le numéro en binaire associé au nœud G ?
- 2.2. Quel est le nœud dont le numéro en binaire vaut 13 en décimal ?
- 2.3. En notant h la hauteur de l'arbre, sur combien de bits seront numérotés les nœuds les plus en bas ?
- 2.4. Justifier que pour tout arbre de hauteur h et de taille $n \geq 2$, on a :

$$h \leq n \leq 2^h - 1$$

3. Un arbre binaire est dit complet si tous les niveaux de l'arbre sont remplis.



On décide de représenter un arbre binaire complet par un tableau de taille $n + 1$, où n est la taille de l'arbre, de la façon suivante :

- La racine a pour indice 1 ;
- Le fils gauche du nœud d'indice i a pour indice $2 \times i$;
- Le fils droit du nœud d'indice i a pour indice $2 \times i + 1$;
- On place la taille n de l'arbre dans la case d'indice 0.

- 3.1. Déterminer le tableau qui représente l'arbre binaire complet de l'exemple précédent.
- 3.2. On considère le père du nœud d'indice i avec $i \geq 2$. Quel est son indice dans le tableau ?

4. On se place dans le cas particulier d'un arbre binaire de recherche complet où les nœuds contiennent des entiers et pour lequel la valeur de chaque nœud est supérieure à celles des nœuds de son fils gauche, et inférieure à celles des nœuds de son fils droit.

Écrire une fonction « recherche » ayant pour paramètres un arbre **arbre** et un élément **element**. Cette fonction renvoie **True** si **element** est dans l'arbre et **False** sinon. L'arbre sera représenté par un tableau comme dans la question précédente