

Introduction générale

L'introduction générale s'organise autour de trois axes principaux :

1. **L'approche historique et pratique** : Elle retrace l'évolution de la programmation linéaire depuis 1947 et illustre son utilité à travers un modèle de production industrielle visant à maximiser les bénéfices sous contraintes de ressources.
2. **Les fondements de l'algèbre vectorielle** : Cet axe définit les structures mathématiques nécessaires, telles que les espaces vectoriels et le calcul du rang d'une matrice, pour formaliser les problèmes d'optimisation.
3. **L'analyse géométrique et algorithmique** : Cette partie explore les concepts d'ensembles convexes et de polyèdres, introduisant l'algorithme du simplexe comme méthode de résolution pour trouver des points extrêmes optimaux. »

1 Historique

La programmation linéaire est un cadre mathématique général permettant de modéliser et de résoudre certains problèmes d'optimisation. Mathématiquement, le problème consiste à optimiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires liant les variables.

Historiquement, la programmation linéaire a été développée et utilisée en 1947 par George Bernard Danzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Department of the Air Force. Les premières applications se situaient dans le domaine militaire mais elles se sont rapidement déplacées vers l'industrie et la planification économique : il s'agit par exemple de déterminer la production maximisant le bénéfice compte tenu des ressources limitées ou minimisant les coûts tout en garantissant une production donnée, de résoudre des problèmes d'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés,

Bref.

Programmation Linéaire

C'est une technique pour trouver la solution "gagnante" (le plus de profit ou le moins de coût) en respectant des règles strictes (contraintes).

- Variable de décision : Ce que l'on cherche à calculer (ex: combien de produits fabriquer).
- Fonction objectif : Le but à atteindre, comme maximiser un bénéfice.
- Contraintes : Les limites à ne pas dépasser (ex: temps de travail disponible, budget).

2 Modélisation d'un problème de production pratique sous forme de programme linéaire

Une entreprise fabrique deux produits P1 et P2, chacun nécessitant l'utilisation de 3 machines M1, M2 et M3 disponibles respectivement 9900 mn, 8400 mn et 9600 mn par semaine. Une unité de produit P1 utilise 11 mn de M1, 7 mn de M2 et 6 mn de M3. De même, une unité de produit P2 a

besoin de 9 mn de M1, 12 mn de M2 et 16 mn de M3. Les bénéfices de vente par unité de produit sont respectivement de 900 DA pour P1 et 1000 DA pour P2.

Tableau des données du problème de la production

Machines	M1	M2	M3	Bénéfices
P1	11	7	6	900
P2	9	12	16	1000
Disponibilités	9900	8400	9600	

Une solution de ce problème consiste à fixer le volume de production optimale hebdomadaire de ces deux produits.

Notons :

- x_1 : nombre d'unités de fabrication de P1
- x_2 : nombre d'unités de fabrication de P2

x_1 et x_2 sont les **variables de décision** de notre problème.

Le but est de déterminer un bénéfice maximum par semaine compte tenu des disponibilités des machines. Il faut donc chercher un maximum du bénéfice (appelé **fonction économique ou objectif**) :

$$\text{Max } F(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2$$

Cette fonction est soumise aux contraintes suivantes :

$$11x_1 + 9x_2 \leq 9900$$

$$7x_1 + 12x_2 \leq 8400$$

$$6x_1 + 16x_2 \leq 9600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Bref.

La modélisation pratique : Elle illustre comment transformer un problème de production réel en programme linéaire pour maximiser les bénéfices.

3 Géométrie de la programmation linéaire

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager des propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction

par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, aux matrices, aux polynômes, aux espaces de fonctions... etc.

Définitions

- Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda.u$. Voici la définition formelle :

Définition formelle :

Un K -espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :

D'une **loi de composition interne**, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longrightarrow u+v \end{aligned}$$

D'une **loi de composition externe**, c'est-à-dire d'une application de $K \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\longrightarrow \lambda.u \end{aligned}$$

- Ensemble convexe

Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tout X et Y de C , le segment $[X, Y]$ est tout entier contenu dans C . *Remarque : C est une forme géométrique.*

- Hyperplan

Dans les espaces vectoriels de dimension n , les hyperplans sont des sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$:

- En dimension 4, l'hyperplan est de dimension 3 (polyèdre).
- En dimension 3, l'hyperplan est de dimension 2 (polygone).
- En dimension 2, l'hyperplan est de dimension 1 (droite).

- Polyèdre

Un polyèdre est une forme géométrique à trois dimensions ayant des faces planes (polygones) qui se rencontrent le long d'arêtes droites.

- Point extrême

Le point qui se trouve au bord d'une forme géométrique.

- Simplexe

L'algorithme du simplexe de George Dantzig est une technique à la fois fondamentale et très populaire pour les problèmes de programmation linéaire.

Bref.

Le cadre théorique : L'utilisation des espaces vectoriels et des matrices pour structurer les données.

Concepts Géométriques

- **Ensemble convexe** : Une forme où l'on peut relier n'importe quels deux points intérieurs par un trait droit sans jamais sortir de la forme.
- **Hyperplan** : C'est une généralisation de la notion de "plan" ou de "droite" dans des dimensions supérieures.
- **Polyèdre** : Une forme solide dont toutes les faces sont plates.
- **Point extrême** : Un "coin" ou un sommet de la forme géométrique. C'est souvent là que se cache la solution optimale.

- Equation linéaire

Une équation de la forme $ax+b=0$, où x est une inconnue, a et b sont des réels.

- **Système d'équation linéaire**: Un ensemble d'équations qui utilisent les mêmes inconnues (variables).

- **Rang d'une matrice** : Le nombre maximal de ses vecteurs lignes (ou vecteurs colonnes) qui sont linéairement indépendants.

Exemple de calcul de rang :

Soit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Analyse :

- La ligne 2 est le double de la ligne 1 ($L_2=2 \times L_1$), elles ne sont donc pas linéairement indépendantes.
- Par conséquent, la matrice M a pour **rang 2**.
- On peut aussi vérifier suivant les colonnes : la colonne 3 est la somme des colonnes 1 et 2 ($C_3=C_1+C_2$).

Algèbre et Matrices

- **Espace Vectoriel** : Un ensemble d'objets (vecteurs) que l'on peut additionner entre eux ou multiplier par des nombres.
- **Système d'équations linéaires** : Un groupe d'équations liées qui partagent les mêmes inconnues.
- **Rang d'une matrice** : C'est le nombre d'informations réellement indépendantes et "uniques" contenues dans un tableau de nombres. Si une ligne n'est qu'une répétition (ou un double) d'une autre, elle ne compte pas dans le rang.

Bref.

Algèbre et Matrices

- **Espace Vectoriel** : Un ensemble d'objets (vecteurs) que l'on peut additionner entre eux ou multiplier par des nombres.
- **Système d'équations linéaires** : Un groupe d'équations liées qui partagent les mêmes inconnues.
- **Rang d'une matrice** : C'est le nombre d'informations réellement indépendantes et "uniques" contenues dans un tableau de nombres. Si une ligne n'est qu'une répétition (ou un double) d'une autre, elle ne compte pas dans le rang.

4. Algorithme du Simplexe

C'est la méthode de calcul (inventée par George Dantzig) la plus célèbre pour résoudre les problèmes de programmation linéaire en passant d'un coin (point extrême) à l'autre d'un polyèdre jusqu'à trouver le meilleur.