

Méthode primale de
résolution d'un
programme linéaire .

CHAPITRE 2

Algorithme du Simplexe (Phase unique)

S.SAHRAOUI

2025/2026

L3 - SI

Pour résoudre un programme linéaire on utilise :

**1) La méthode graphique
(pour deux variables)**

**2) L'algorithme du simplexe
(pour un nombre quelconque de variables).**



Introduction

La méthode du simplexe est une technique itérative pour résoudre les problèmes de programmation linéaire (PL), c'est-à-dire :

- Maximiser ou minimiser une fonction linéaire
- Sous un ensemble de contraintes linéaires

Principe fondamental

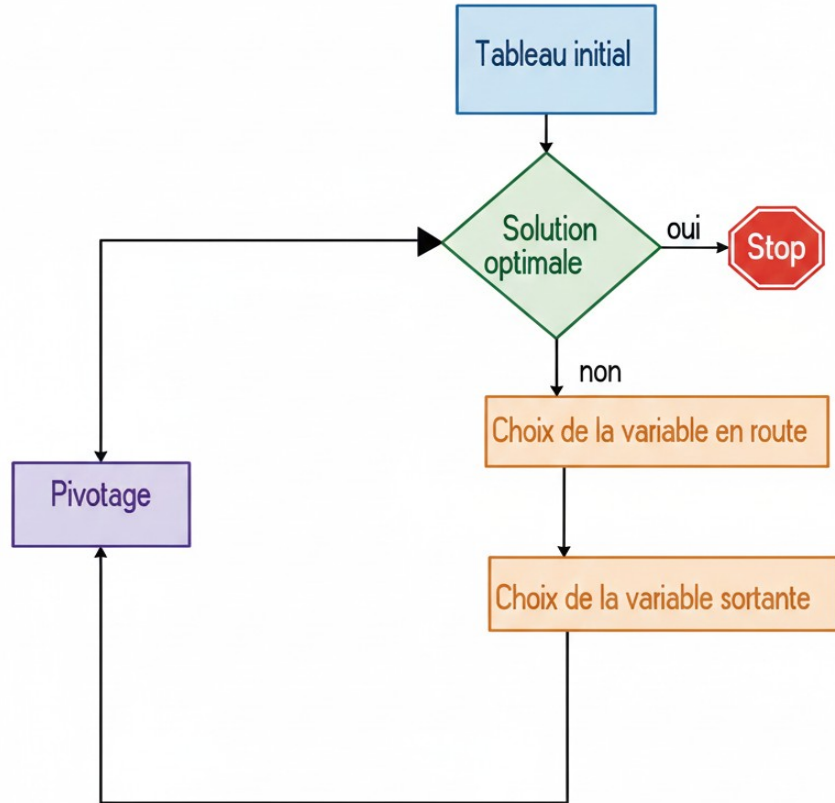
- La méthode du simplexe est itérative et méthodique
- Commence avec une solution de base initiale
- Se termine quand aucune amélioration n'est possible

L'algorithme du simplexe

pseudo-code

```
Initialiser tableau avec variables d'écart
Tant que (il existe un coefficient négatif dans Z)
  Choisir variable entrante (plus négatif dans Z)
  Calculer ratios  $b / \text{colonne pivot} > 0$ 
  Si aucun ratio positif
    Alors problème non borné
    Stop
  Fin Si
  Choisir variable sortante (ratio minimal)
  Effectuer pivot pour rendre colonne pivot = 1 et autres lignes = 0
  Mettre à jour base
Fin Tant que
Lire solution optimale
```

organigramme simplifié de l'algorithme du Simplexe,



Définitions

Les Variables d'Écart (Slack Variables) et Variables d'Excédent (Surplus Variables) :

Avant que l'algorithme du simplexe puisse être utilisé pour résoudre un programme linéaire, ce programme linéaire doit être converti en un programme équivalent où toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables sont non négatives.

- les contraintes de type inférieur ou égal ($\leq$). Comme le côté gauche est "plus petit", on ajoute une valeur pour atteindre l'égalité.

Règle : On ajoute une variable d'Écart positive ou nulle e_i .

Exemple : $3x_1 + 2x_2 \leq 2 \implies 3x_1 + 2x_2 + e_1 = 2$

- les contraintes de type supérieur ou égal ($\geq$). Comme le côté gauche est "plus grand", on retranche (soustrait) une valeur pour atteindre l'égalité.
- Règle : On soustrait une variable d'Excédent positive e_i .

Exemple: $3x_1 + 2x_2 \geq 2 \implies 3x_1 + 2x_2 - e_2 = 2$

Définitions

Variables de Base et Hors Base

Une Solution de Base au système d'équations $AX=b$ s'obtient en donnant zéro à $(n-m)$ variables et en résolvant le système pour les m variables restantes.

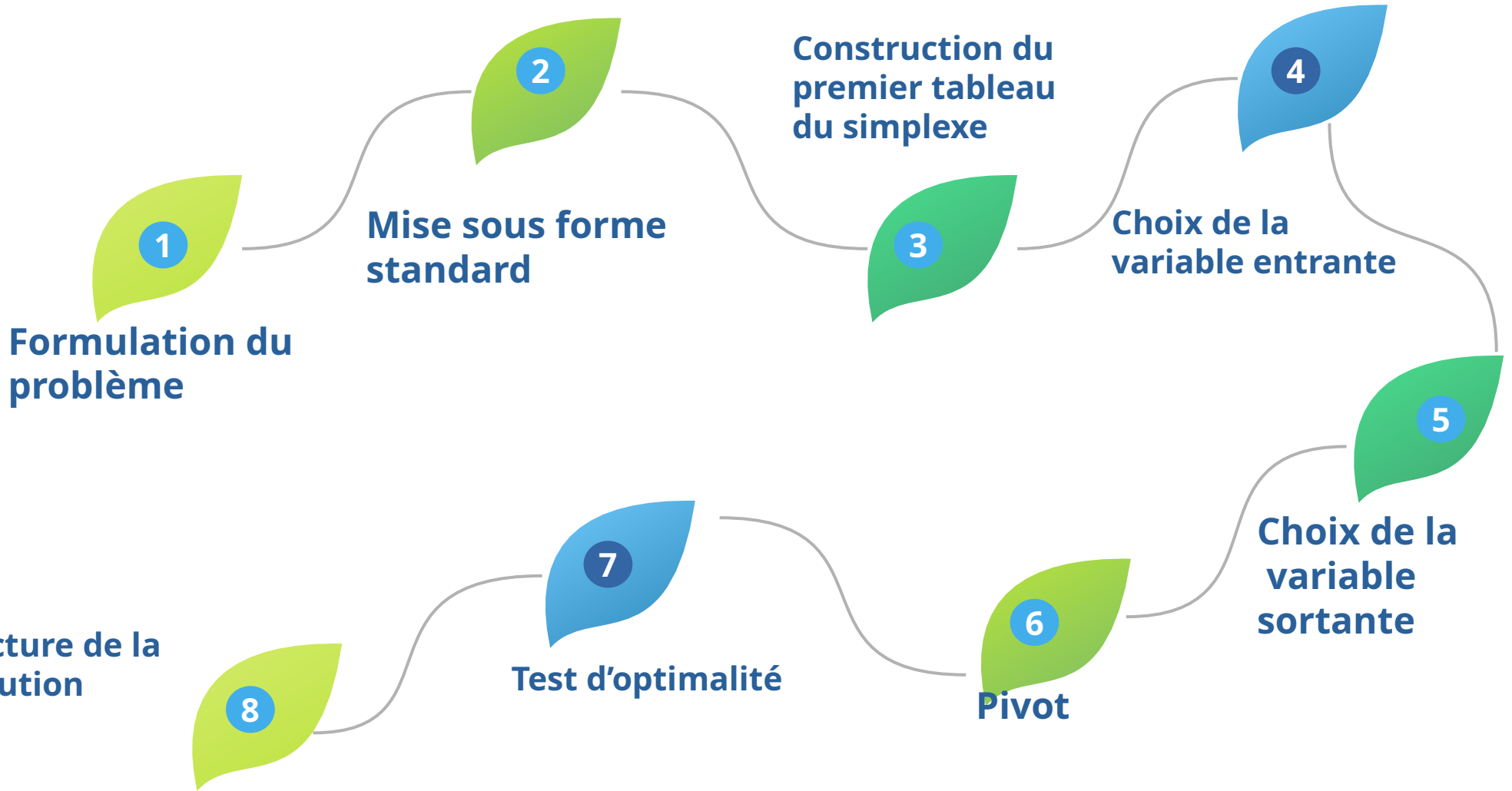
Les $(n-m)$ variables qui sont annulées sont dites variables **hors base** alors que les m variables restantes sont appelées **variables de base**.

Donc, un programme linéaire admet au plus :

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{Solutions de base.}$$

Définition Cruciale : Une solution de base est dite admissible si toutes les variables de cette solution sont ≥ 0 .

L'Algorithme du Simplexe



Avantages de l'algorithme du simplexe



**Efficace
pour les
grands
problèmes**



**Donne
toujours une
solution
optimale (si
elle existe)**



**Interprétation
économique
possible (prix
d'ombre,
ressources...)**

Limitations

**Ne traite pas
directement
les problèmes
non linéaires**



**Peut avoir
plusieurs
solutions
optimales
ou être
non borné**

Algorithme du Simplexe – Étapes détaillées

1. Mise sous forme standard
2. Construire le tableau initial du simplexe
3. Recherche de la variable entrante (critère Z)
4. Recherche de la variable sortante (test des rapports)
5. Effectuer Pivotage
6. Nouveau tableau (itération suivante)
7. Répéter jusqu'à optimalité (Condition d'arrêt)
8. Lecture de la solution finale

Exemple illustratif du Restaurateur



$$\text{Max } Z = 1000x + 1500y$$

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$x + y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$

1. Mise sous forme standard

Pour appliquer le simplexe, il faut transformer le problème :

Mettre toutes les contraintes sous forme d'égalité

Pour les contraintes $\leq$: ajouter une variable d'écart (slack)

ex : $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + s = b$

Pour les contraintes $\geq$: soustraire une variable d'écart et (souvent) ajouter une variable artificielle.

Toutes les variables doivent être ≥ 0

Exemple Mise sous forme standard

tape 0 : Ajouter les variables d'écart (slack variables)



$$\text{Max } Z = 1000x + 1500y$$

$$5x + 3y + e1 = 30$$

$$2x + 3y + e2 = 24$$

$$x + y + e3 = 18$$

$$x, y, e1, e2 \geq 0$$

2. Construire le tableau initial du simplexe

Le tableau contient :

les variables de base (slack, artificial)

les coefficients des contraintes

la ligne de la fonction objectif (ligne Z)

2. Construire le tableau initial du simplexe

Cj		1000	1500	0	0	0	
CB	V.B	x	y	e1	e2	e3	SB
0	e1	5	3	1	0	0	30
0	e2	2	3	0	1	0	24
0	e3	1	(3)	0	0	1	18
Zj		0	0	0	0	0	Z = 0
Cj – Zj		1000	1500	0	0	0	

2. Construire le tableau initial du simplexe

Cellule **a_{ij}** correspond
au variable **x**

Coeff des VARs dans la
fonction Obj **Z**

Coeff des VARs de Base
dans la fonction Obj **Z**

Z_j = somme $CB \times a_i$
Exp pour la colonne x
 $Z_j = 0 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 0$

Initialement, la solution de
base **SB** est constituée des
parties droites des contraintes.

		C_j					
		1000	1500	0	0	0	
CB	V.B	x	y	e1	e2	e3	SB
0	e1	5	3	1	0	0	30
0	e2	2	3	0	1	0	24
0	e3	1	(3)	0	0	1	18
		Z_i					
		0	0	0	0	0	$Z = 0$
		$C_j - Z_j$					
		1000	1500	0	0	0	

La fonc Obj est calculée comme
suit : $Z = \text{Somme } C_{bi} \times S_{bi}$
Exp **$Z = 0 \times 30 + 0 \times 24 + 0 \times 18$**

3. Recherche de la variable entrante

Objectif : améliorer la valeur de Z .

Maximisation : choisir la colonne ayant le coefficient le plus grand non négatif dans la ligne Z .

Minimisation : choisir la colonne ayant le coefficient le plus petit non négatif .

C'est la variable entrante.

Elle indique la direction dans laquelle Z peut s'améliorer.

Cj		1000	1500	0	0	0	
CB	V.B	x	y	e1	e2	e3	SB
0	e1	5	3	1	0	0	30
0	e2	2	3	0	1	0	24
0	e3	1	(3)	0	0	1	18
Zj		0	0	0	0	0	Z = 0
Cj – Zj		1000	1500	0	0	0	

Max (1000,1500,0,0,0)=1500 alors y entre dans la base

4. Recherche de la variable sortante

Pour assurer que les contraintes restent satisfaites :

Calculez les rapports :

$$\text{Rapport} = \frac{\text{Sbi}}{\text{coefficient positif dans la colonne entrante}}$$

Choisir le plus petit rapport positif.

La ligne correspondante donne la variable sortante.

Var entrante

Cj			1000	1500	0	0	0	
CB	V.B	x	y	e1	e2	e3	SB	
0	e1	5	3	1	0	0	30	
0	e2	2	3	0	1	0	24	
0	e3	1	(3)	0	0	1	18	
Zj		0	0	0	0	0	Z = 0	
Cj - Zj		1000	1500	0	0	0		

$\text{Min}(30/3, 24/3, 18/3) = 6$
 Alors e3 sort de la base

Var Sortante

C'est le pivot

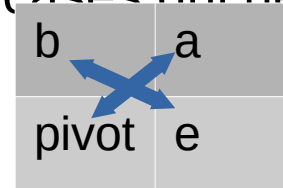
Règles du Pivotage

On transforme le tableau :

- 1) Diviser la ligne du pivot par le pivot.
- 2) La colonne du pivot autre que le pivot, c'est des 0.
- 3) Chaque fois la ligne du pivot croise une colonne du zéro $\Rightarrow$ recopier la colonne.
- 4) Les autres cases : appliquer la "règle du rectangle"

la règle permet de calculer les nouvelles valeurs des cases qui ne sont ni sur la ligne, ni sur la colonne du pivot.

Pour une valeur située à l'emplacement **a**



la nouvelle valeur a' est calculée ainsi : $a - e \cdot b / p$

2eme itération

Cj		1000	1500	0	0	0	
CB	VB	x	y	e1	e2	e3	SB
0	e1	④	0	1	0	-1	12
0	e2	1	0	0	1	-1	6
1500	y	1/3	1	0	0	1/3	6
	Zj	500	1500	0	0	500	Z=9000
	Cj-Zj	500	0	0	0	-500	

Max (500,0,0,0,0)=500 alors x entre dans la base

Min(12/4,6/1,6*3/1)=3 Alors e1 sort de la base

6. Nouveau tableau (itération suivante)

Recalculer la ligne Z.

Vérifier si :

Il reste des coefficients positifs (maximisation)

Ou des coefficients négatifs (minimisation)

Si oui → continuer avec une autre itération.

Si non → on a atteint l'optimum.

7. Condition d'arrêt

L'algorithme s'arrête lorsque :

Tous les coefficients de la ligne Z sont :

≤ 0 pour maximisation

≥ 0 pour minimisation

Alors la solution est optimale.

la solution est optimale

Cj		1000	1500	0	0	0	
CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
1000	x1	1	0	1/4	0	-1/4	3
0	x4	0	0	-1/4	1	-3/4	3
1500	x2	0	1	-1/12	0	5/12	5
	Zj	1000	1500	125	0	375	Z=10500
	Cj-Zj	0	0	-125	0	-375	

8. Lecture de la solution finale

Les variables dans la colonne "Base" lisent directement leur valeur dans la colonne b

Toutes les autres variables non basiques = 0

La valeur de l'objectif est la valeur dans la case du Z (colonne b).

Lecture de la solution finale

Cj		1000	1500	0	0	0	
CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
1000	x1	1	0	1/4	0	-1/4	3
0	x4	0	0	-1/4	1	-3/4	3
1500	x2	0	1	-1/12	0	5/12	5
	Zj	1000	1500	125	0	375	Z=10500
	Cj-Zj	0	0	-125	0	-375	

$Z = \text{somme } c_{bi} \cdot s_{bi}$

$$Z = 1000 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1500 \cdot 5 = 10500$$

Td2 Exo n°01



Td2 Exo n°03

Maximiser : $Z = x_1 + 2x_2$

Sous les contraintes :

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_i \geq 0 \text{ pour } i=1,2$$

Tableau 0

X2
var E

X3
var S

Cj		1	2	0	0	0	
CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
0	x3	-3	②	1	0	0	2
0	x4	-1	2	0	1	0	4
0	x5	1	1	0	0	1	5
	Zj	0	0	0	0	0	Z=0
	Cj-Zj	1	2	0	0	0	

X1
var E

X4
var s

Cj		1	2	0	0	0	
CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
2	x2	-3/2	1	1/2	0	0	1
0	x4	②	0	-1	1	0	2
0	x5	5/2	0	-1/2	0	1	4
	Zj	-3	2	1	0	0	Z=2
	Cj-Zj	4	0	-1	0	0	

Cj		1	2	0	0	0	
CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
2	x2	0	1	-1/4	3/4	0	5/2
1	x1	1	0	-1/2	1/2	0	1
0	x5	0	0	3/4	-5/4	1	3/2
	Zj	1	2	-1	2	0	Z=6
	Cj-Zj	0	0	1	-2	0	

CB	VB	x1	x2	x3	x4	x5	SB
2	x2	0	1	0	1/3	1/3	3
1	x1	1	0	0	-1/3	2/3	2
0	x3	0	0	1	-5/3	4/3	2
	Zj	1	2	0	1/3	4/3	Z=8
	Cj-Zj	0	0	0	-1/3	-4/3	

Thank you!

